Objectifs du GT pour l'année

M. Rambaud
(notes de J-P Flori et B. Smith)
27/11/2014

Ce qu'on veut faire :

I Paramétrer une famille de surfaces abéliennes avec multiplication par une algèbre de quaternions...

II ...par une "courbe de Shimura"...

III ...dont on veut calculer l'équation (mod p).

1 Partie I

(a) nos quaternions

Soit B une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$: c'est à dire, B est une algèbre de dimension 4 sur $\mathbf{Q}$, telle que il existe a et $b \in \mathbf{Q}$, tels que

$$B = \mathbf{Q}\langle i, j \rangle \ , \quad \text{avec} \quad i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = -ji \ .$$

On impose les conditions suivantes :
- B est "indéfinie" : ie $B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})$.
- mais B est un corps non commutatif (et non pas $M_2(\mathbf{Q})$)
- B et donc son discriminant, D, est > 1, où $D = \prod_p p$ avec les premiers p tels que $B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$ est un corps non commutatif (et non pas $\cong M_2(\mathbf{Q}_p)$).

Soit $\mathcal{O}$ un "ordre maximal" dans B : c'est à dire que $\mathcal{O}$ est un réseau de rang 4 dans B, constituté d'éléments entiers sur $\mathbf{Z}$. $\mathcal{O}$ est alors un anneau.

(b) construction des variétés abéliennes

On fixe, une fois pour toutes, un isomorphisme $B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})$, d'oú un plongement :

$$\psi : B \hookrightarrow M_2(\mathbf{R}) \ .$$

On a une action de $M_2(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 \\ cw_2 + dw_2 \end{pmatrix}$$

Soit $u = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ tel que $w_1/w_2 \notin \mathbf{R}$. Propriété : l'orbite de u sous l'image de $\mathcal{O}$, qu'on note

$$\Lambda_u := \psi(\mathcal{O})u \ ,$$

est un réseau de $\mathbf{C}^2$. Alors, on a un tore complexe associé à u :

$$A_u := \mathbf{C}^2/\Lambda_u \ .$$

(c) construction d'une "forme de Riemann"

Soit $\mu \in B$ tel que $\mu^2 = -1/D$ (cf. exposés) [1]. Soit

$$\begin{aligned} E : \Lambda_u \times \Lambda_u &\longrightarrow \mathbf{Z} \ , \\ (\psi(\alpha)u, \psi(\beta)u) &\longmapsto \mathrm{trd}(\mu\alpha\bar{\beta}) \end{aligned}$$

(où, pour $\alpha = x + iy + jz + ijw$, on a $\bar{\alpha} := x - iy - jz - ijw$ et $\mathrm{trd}(\alpha) = 2x$). Soit $E_{\mathbf{R}}$ la forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée E étendue à $\mathbf{C}^2$; alors

— $E(\sqrt{-1}\,\cdot, \sqrt{-1}\,\cdot) = E(\cdot, \cdot)$,
— $E_{\mathbf{R}}$ est entière sur le réseau Λ_u, et
— "la forme hermitienne associée à $E_{\mathbf{R}}$ est symétrique définite positive" ;

$\iff$ $E(\sqrt{-1}\cdot, \cdot) > 0$, ce qui implique que A_u est une variété algébrique.

(d) isomorphismes

Soit ψ et μ fixés. À quelle condition (A_u, E_u, ψ) est isomorphe à (A_v, E_v, ψ) ? Notons que après $u = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1/w_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut supposer que $u = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, si on note $\mathcal{O}^{(1)}$ les éléments de norme 1 dans $\mathcal{O}$, (A_τ, E_τ, ψ) est isomorphe à $(A_{\tau'}, E_{\tau'}, \psi)$ ssi $\psi(\epsilon)\tau = \tau'$ pour un inversible $\epsilon \in \mathcal{O}^{(1)}$, où comme d'habitude $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

2 Partie II

(a) courbes de Shimura

Le quotient $X = \psi(\mathcal{O}^{(1)})\backslash\mathcal{H}$, une surface de Riemann compacte, paramètre les surfaces abéliennes A_τ que l'on vient de construire.

(b) l'algèbre d'endomorphismes

Liste des possibilités

Théoreme : si A est une surface abélienne complexe simple, alors l'algèbre des endomorphismes de A : $\mathrm{End}^0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbf{Q}$ (qui ne préservent pas nécessairement la polarisation), est l'une des suivantes :

1. On peut même choisir $\mu^{-1} \in \mathcal{O}$

	$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbf{Q}$	dimension
(i)	$\mathbf{Q}$	3
(ii)	K corps quadratique imaginaire	2
(iii)	corps B de quaternions sur Q, indéfinie	1
(iv)	"corps quartique CM"	0

(Ici, "dimension" parle du sous-espace de l'espace de modules correspondant.) Si A n'est pas simple :

(v)	$M_2(K)$, K quadratique imaginaire	0
(vi)	$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$	?
(vii)	$M_2(\mathbf{Q})$	1 ?

Nous sommes dans le cas (iii)

Il correspond aux conditions que nous avons imposées sur B. Deux remarques :

— Il y a deux autres algèbres de quaternions dans la liste. En fait : (vii) $M_2(\mathbf{Q})$ aurait conduit aux courbes modulaires classiques, tandis que (v) correspond aux points CM sur la courbe de Shimura (que l'on voudra étudier).

— Plus important : on n'a regardé que des réseaux Λ_τ images d'un "ordre maximal" $\mathcal{O}$ de B. Alors qu'en général, les surfaces abéliennes qui admettent B comme algèbre d'endomorphismes ont leur réseau Λ_τ qui est l'image d'un idéal quelconque de B. Certains idéaux, comme les "ordres d'Eichler de niveau N", permettraient déjà d'obtenir beaucoup plus de courbes de Shimura.

Remarques culturelles sur la liste

(iii) et (vii) En général, une variété abélienne de dimension supérieure peut avoir son algèbre d'endomorphismes égale à un troisième type d'algèbre de quaternions, en plus de ceux de (iii) et (vii). B est alors un corps de quaternions, *totalement définie*, sur un corps totalement réel F. C'est à dire que B est un corps non commutatif de dimension 4 sur F, définie par le même type de relations que précédemment, telle que pour tous les plongements $\sigma : F \hookrightarrow \mathbf{R}$, $B \otimes_{F,\sigma} \mathbf{R}$ soit, cette fois, isomorphe au *corps des quaternions réels* $\mathbf{H}$ (et pas l'autre possibilité, qui était $M_2(\mathbf{R})$). Cette situation n'existe pas dans le cas des surfaces abéliennes simples, par l'"exercice" 9.9 (1) de Birkenhake et Lange (démontré dans Shimura 1963, proposition 15). Ce résultat implique en effet que si $\mathrm{End}^0(A)$ contenait une telle algèbre B totalement définie, alors A serait en fait égale au produit de deux courbes elliptiques $E_1 \times E_2$, isogènes entre elles et à multiplication complexe par un corps quadratique K sur Q[2]. Donc dans ce cas l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}^0(A)$ est égale à $M_2(K)$ (c'est le cas (v)). $\mathrm{End}^0(A)$ contiendrait donc strictement B, et ne lui serait donc pas égale.

2. Dans cette situation, il est même démontré que A est isomorphe à un produit de courbes elliptiques (Birkenhake-Lange cor 10.6.3, l'isomorphisme ne préservant pas nécessairement la polarisation).

(iii) une famille de ce type, paramétrée par une courbe de Shimura, peut être vue dans l'intersection de deux familles distinctes de type (ii) paramétrées par des surfaces [3].

(v) Dès lors que A contient une courbe elliptique à multiplication complexe, (v) est bien la seule possibilité. En effet, les "exercices" 9.9 (3) et (4) de Birkenhake et Lange montrent en particulier que, lorsque $\mathrm{End}^0(A)$ *contient* un corps quadratique imaginaire K, alors - ou bien A est égale au produit de deux courbes elliptiques $E_1 \times E_2$, isogènes entre elles et à multiplication complexe par un corps quadratique K sur Q (cas (v), cf précédemment) - ou bien on est dans les cas (iii) ou (vii) (et alors A ne peut pas contenir de courbe elliptique à multiplication complexe).

(vi) et (vii) correspondent par conséquent à la seule possibilité restante, c'est à dire A égale à un produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$ dont les algèbres d'endomorphismes seraient égales à $\mathbf{Q}$, isogènes ((vii)) ou non ((vi)). J'ignore si le cas (vi) existe [4], et encore moins son éventuelle dimension dans l'espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées].

3 Partie III

X correspond au choix d'un plongement $\psi : B \hookrightarrow M_2(\mathbf{R})$, et d'un élément μ dans B (pour fabriquer la polarisation E_τ), fixés une fois pour toutes. On vient de constuire une flèche de X dans $\mathcal{A}_{2,1}$ l'ensemble des surfaces abéliennes avec un polarisation principale, mais qui oublie ψ. Donc a priori ce n'est pas une injection [5]. Effectivement elle est de degré 4 ou 2. On appelle $\tilde{E}$ l'image de X dans $\mathcal{A}_{2,1}$. Comment la décrire ? On peut utiliser $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des courbes C de genre 2 sur $\mathbf{C}$ auxquelles on associe leurs jacobiennes et un diviseur théta $((Jac(C)), \Theta)$. Premier objectif : préimage E de $\tilde{E}$ dans $\mathcal{M}_2$.

$\mathcal{A}_{2,1}$ peut se voir comme un ouvert d'un quotient de $\mathbb{P}^3_{\mathbf{C}}$, où l'image de $\mathcal{M}_2$ est dense.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_{2,1} & \mathcal{M}_2 \arrow[l, hook', "(\mathrm{Jac}(C),\Theta)"'] \\ X \arrow[r, "{[4:1] \text{ ou } [2:1]}"] & \tilde{E} \arrow[u, hook] & E \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Pour calculer l'équation de la courbe X, idée : calculer l'image de points particuliers « à multiplication complexe », c'est à dire qui correspondent à des surfaces abléliennes à multiplication par $M_2(K)$. Puis interpoler la courbe connaissant son degré, et les points de ramification de l'application vers $\mathcal{A}_{2,1}$ (qui sont certains points CM). Pour connaître le degré : soit calculer une équation de X avec des développement de formes méromorphes, soit le calculer à l'aide des formules donnant le genre et le nombre de points elliptiques (de degrés 2 et 3). Ensuite, essayer de dire quelque chose sur le degré de X mod p.

3. Sous les conditions rappelées dans le théorème 5.4 de la thèse de Gruenewald.

4. [Listé dans la thèse de Gruenewald (p18), évoqué dans la thèse de Pete Clark (p36) et dans Zannier 2012 (rk 3.4.4), mais pas dans la liste des "three lectures on Shimura curves" de Voight 2006.]

5. Cela revient à quotienter X par les isomorphismes de triplets (A_τ, E_τ, ψ) qui préservent à la fois la polarisation E_τ et le plongement ψ (pour que ce soit un automorphisme de X).

4 Exposés attribués

Voir le programme du GT (version du 20/11/2014) pour les détails, la bibliographie et surtout des propositions d'exposés plus spécialisés.

1. Variétés abéliennes (S. Haloui, 11/12 16h en C47).

2 Arithmétique des algèbres de quaternions (B. Meyer, début janvier)

3 Espace de modules de surfaces abéliennes, vu comme un quotient compact de $\mathcal{H}$ (V. Ducet, début janvier)

4 Trois points de vue sur les points CM (J. Plût, fin janvier/début février)

5 Jacobiennes I (B. Smith, 26 ou 27 février ?)

6 Jacobiennes II (C. Ritzenthaler, 26 ou 27 février)

7.1 Invariants des formes binaires, espaces de modules de surfaces abéliennes et de courbes de genre 2 (C. Ritzenthaler ?)